

Another way to solve cubic equations

Nurbayev Abdurashid Ravshanovich

Gulistan State University lecturer

Boymuradov Diyorbek Ilhom O'G'Li

Gulistan State University student

Annotation. *This article describes another method of solving third-order equations, which differs from the previously known methods. In this method, it is solved using the substitution proposed by Chirengauz, and the examples are shown.*

Keywords : *equations of the third degree, Umar Khayyam, Cardano, Chirngauz.*

Uchinchi darajali tenglamani XI asrda Umar Xayyom(1048-1123) birinchi marta geometrik usulda yechgan edi. U uchinchi darajali tenglamani aylana va parabola tenglamalariga ajratib ularning kesishish nuqtasining berilgan tenglamaning yechimi ekanligini isbotlagan edi. Uning koordinitalar sistemasidagi o'qlar chapdan o'ngga va yuqoridan pastga qarab yo'naltirilgan .([1], ga qarang) XVI asr boshida italiyalik Ferro (1465-1526)

$$x^3+px+q=0 \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaning yechish usulini topgan edi.

1545 yilda italiyalik Kardano (1501-1576) (1) ko'rinishdagi tenglamani italiyalik Tartalya (1500-1557) ko'rsatgan usulda bayon etdi.([2], 250-255 betlarga qarang)

Biz yuqorida qayd etilgan usuldan jiddiy farq qiluvchi usulni bayon qilamiz. Quyidagi usul yuqorida qayd qilingan usullardan jiddiy farq qiladi.

Biz

$$x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0 \quad (2)$$

tenglamani ko'rib o'tamiz , bunda c_1, c_2, c_3 berilgan sonlar (haqiqiy yoki kompleks)

Agar

$$x=t+ c_1/3$$

almashtirish bajarilsa (2) tenglama

$$t^3+at+b=0$$

ko'rinishga keladi, ya'ni (1) ko'rinishda bo'ladi.

Biz (2) dan

$$x^3=-c_1x^2-c_2x-c_3 \quad (3)$$

deb yozamiz.

1683 yilda Chirngauz taklif qilgan

$$y = p_0 + p_1x + p_2x^2$$

almashtirishdan foydalanamiz ([3],ga qarang), bunda p_0, p_1, p_2 - sonlar hozircha noma'lum (haqiqiy, kompleks). Bu almashtirish va (3) ga asosan

$$yx = (p_1 - c_1p_2)x^2 + (p_0 - c_2p_2)x - c_3p_2 = p_0' + p_1'x + p_2'x^2$$

$$yx^2 = (p_1 - c_1p_2)x^3 + (p_0 - c_2p_2)x^2 - c_3p_2 = p_0'' + p_1''x + p_2''x^2$$

tengliklarni hosil qilamiz, bunda $x^3=-c_1x^2-c_2x-c_3$. Shunday qilib biz

$$\begin{cases} y = p_0 + p_1x + p_2x^2 \\ yx = p_0' + p_1'x + p_2'x^2 \\ yx^2 = p_0'' + p_1''x + p_2''x^2 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga egamiz. Bu sistemani

$$\begin{cases} p_0 - y + p_1x + p_2x^2 = 0 \\ p_0' + (p_1' - y)x + p_2'x^2 = 0 \\ p_0'' + p_1''x + (p_2'' - y)x^2 = 0 \end{cases} \quad (A)$$

ko'rinishda yozamiz.

Endi

$$z_1=1, \quad z_2=x, \quad z_3=x^2 \quad (*)$$

deb belgilaymiz. U holda (A) ni

$$\begin{cases} (p_0 - y)z_1 + p_1z_2 + p_2z_3 = 0 \\ p_0'z_1 + (p_1' - y)z_2 + p_2'z_3 = 0 \\ p_0''z_1 + p_1''z_2 + (p_2'' - y)z_3 = 0 \end{cases}$$

ko'rinishda yozamiz. Buni z_1, z_2, z_3 larga nisbatan bir jinsli tenglamalar sistemasi deb qaraymiz. Uning nol bo'lmagan yechimlari cheksiz ko'p. Bir jinsli tenglamalar sistemasining nol bo'lmagan yechimlaridan biri.

$z_1=1, z_2=x, z_3=x^2$ ekanligi (ya'ni (*) ekanligi) (A) sistemadan ko'rinib turibdi.

Shuning uchun oxirgi sistemada

$$\begin{vmatrix} p_0 - y & p_1 & p_2 \\ p_0' & p_1' - y & p_2' \\ p_0'' & p_1'' & p_2'' - y \end{vmatrix} = 0 \quad (B)$$

bo'lganda qaralyotgan sistema nolmas yechimlarga ega bo'ladi.

Endi (B) tenglikdan (determinantini yoyib)

$$\begin{aligned} y^3 + (p_0 + p_1' + p_2'')y^2 + (p_0p_1' + p_0p_2'' + p_1'p_2'' - p_2p_0'' - p_2'p_1'' - p_1p_0')y \\ + p_2p_0''p_1' + \\ + p_2'p_1''p_0 + p_1p_0'p_2'' - p_0p_1'p_2'' - p_0''p_2'p_1 - p_1''p_0'p_2 = 0 \end{aligned}$$

tenglamaga ega bo'lamiz va buni quyidagi ko'rinishda yozsak

$$y^3 + d_1y^2 + d_2y + d_3 = 0 \quad (**)$$

tenglamaga ega bo'lamiz, bunda

$$d_1, d_2, d_3 \quad (C)$$

sonlar $p_0, p_1, p_2, p_0', p_1', p_2', p_0'', p_1'', p_2''$ larga bog'liq sonlar. Shu bilan birga o'z navbatida $p_0', p_1', p_2', p_0'', p_1'', p_2''$ sonlar p_0, p_1, p_2 sonlar bilan ifoda etiladi.

Xuddi shunday p_0'', p_1'', p_2'' sonlar ham p_0, p_1, p_2 lar orqali ifoda etiladi.

Demak (C) sonlar p_0, p_1, p_2 lar orqali ifodalanadi.

$$\begin{cases} p'_0 = -c_3 p_2 \\ p'_1 = p_0 - c_2 p_2 \\ p'_2 = p_1 - c_1 p_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p''_0 = c_1 c_3 p_2 - c_3 p_1 \\ p''_1 = c_1 c_2 p_2 - c_2 p_1 - c_3 p_2 \\ p''_2 = c_1^2 p_2 - c_1 p_1 + p_0 - c_2 p_2 \end{cases}$$

Endi p_0, p_1, p_2 larni

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{cases} \quad (D)$$

Ya`ni

$$\begin{cases} p_0 + p'_1 + p''_2 = 0 \\ p_0 p'_1 + p_0 p''_2 + p'_1 p''_2 - p_2 p'_0 - p'_2 p''_1 - p_1 p'_0 = 0 \end{cases}$$

shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz, bunda p_i larning birortasini parametr deb olish kerak.

Natijada (D) ga asosan (**) tenglama

$$y^3 + d_3 = 0 \quad (E)$$

ko`rinishga keladi.

(E) tenglamadan Muavrning ikkinchi formulasiga ko`ra ildiz chiqarsak uchinchi darajali ildizdan y_1, y_2, y_3 larni topamiz.

Endi

$$y = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \quad (F)$$

almashtirishga asosan y_i ($i=1,2,3$) larni qiymatlarini qo'ysak uchta kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Bu kvadrat tenglamani yechamiz, bu erda p_0, p_1, p_2 lar (D) dan aniqlanadi.

Oxirgi (F) ni kvadrat tenglama sifatida yechamiz.

U holda:

$$1) x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$$

$$2) x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$$

$$3) x_1^{(3)}, x_2^{(3)}$$

noma'lumlarni topgan bo'lamiz.

Shunday qilib $x_0=1, x_1, x_2$ yechimlar topilgan bo'ladi, ya'ni (2) tenglamaning yechimlari hosil bo'ladi.

Misol 1.

$$x^3 - 2x - 4 = 0$$

Bu misolni yechish uchun $x^3 = 2x - 4$ deb yozamiz

$y = x^2 + px + q$ almashtirishni olamiz. U holda

$$yx = x^3 + px^2 + qx = px^2 + (q+2)x + 4$$

$$y = px^3 + (q+2)x^2 + 4x = (2x+4)p + (q+2)x^2 + 4x$$

ifodalarni hosil qilamiz va

$$\begin{cases} x^2 + px + q - y = 0 \\ px^2 + (q - y + 2)x + 4 = 0 \\ (q - y + 2)x^2 + (2p + 4)x + 4p = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$\begin{cases} (q-y)z_1 + pz_2 + z_3 = 0 \\ 4z_1 + (q+2-y)z_2 + pz_3 = 0 \\ 4pz_1 + (2p+4)z_2 + (q+2-y)z_3 = 0 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasidan quyidagi determinantni tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q-y \\ p & q-y+2 & 4 \\ q-y+2 & 2p+4 & 4p \end{vmatrix} = 0$$

Bu determinantdan

$$y^3 + d_1y^2 + d_2y + d_3 = 0 \quad (**)$$

uchinchi darajali tenglamani hosil qilamiz.

Endi (**) tenglamani koeffitsientlarini aniqlaymiz.

$$d_1 = 3q + 4$$

$$d_2 = 8q - 12p + 3q^2 + 4 - 2p^2$$

$$d_3 = 12pq + 8p + 2p^2q - 16 - 4p^3 - q^3 - 4q^2 - 4q$$

Endi (D) shartga e'tibor beramiz.

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \end{cases}$$

$$d_1 = 0 \text{ ekanligidan } 3q + 4 = 0, \quad q = -\frac{4}{3}$$

$$d_2 = 6p^2 + 36p + 4 = 0 \text{ va bundan}$$

$$p_{1,2} = \frac{-9 \pm 5\sqrt{3}}{3} = -3 \pm \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

kelib chiqadi. Endi d_3 ni hisoblaymiz.

$$d_3 = -25 \pm 15\sqrt{3}$$

Bu d_3 ning qiymatiga asosan (E) tenglamani tuzamiz. Bundan

$$y = \frac{10}{3} \sqrt[3]{-10 \pm 6\sqrt{3}}$$

hosil qilamiz. $a+bi$ - kompleks sonidan ildiz chiqarishga asosan quyidagilarni hosil qilamiz.(triganometrik ko`rinishga keltirib ildiz chiqarish formulasidan foydalanamiz)

$$a = 10 \pm 6\sqrt{3}, b = 0$$

$$y_1 = -\frac{10}{3} \sqrt[3]{10 \pm 6\sqrt{3}}$$

$$y_2 = -\frac{10}{3} \sqrt[3]{10 \pm 6\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$y_3 = -\frac{10}{3} \sqrt[3]{10 \pm 6\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

ildizlarni hosil qilamiz. Endi p, q va y_1, y_2, y_3 larni aniqlangan qiymatlarida

$$x^2 + p_k x + (q - y_i) = 0$$

$$i = 1, 2, 3; k = 1, 2.$$

tenglamalarni yechamiz. Har bir y_1, y_2, y_3 larda

- 1) y_1 uchun x_1, x_2 larni
- 2) y_2 uchun x_3, x_4 larni
- 3) y_3 uchun x_5, x_6 larni aniqlaymiz

Bu topilgan $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ lardan berilgan tenglamani qanoatlantiradiganlarini aniqlaymiz.

To'rtinchi darajali tenglamalarni ham shu usulda yechish mumkinligini boshqa maqolada e'lon qilamiz.

Adabiyotlar

- 1.G.Gaymnazarov va boshq. Umar Hayyom va algebra. “FMI” jurnal 5-son 2014y
- 2.Kurosh A.G. Oliy algebra kursi, toshkent 1976
3. Просолов В.В. Многочлены. МЦНМО, Москва 2003.
4. A.R.Nurbayev “Kub tenglamani yechishni o`zgacha usuli” Guliston davlat universiteti axborotnomasi. 2017.y.№2